

Arvydas Jokimaitis, Darius Petronaitis

Kauno technologijos universitetas, Matematikos ir gamtos mokslų fakultetas

Studentų 48, LT-51368 Kaunas

E. paštas: arvydas.jokimaitis@ktu.lt, darius.petronaitis@ktu.lt

Santrauka. Straipsnyje rastas maksimalių oro temperatūrų skirstinio įvertis, įvertinta viršutinė temperatūros rekordo riba ir nustatytas rekordo rangas.

Raktiniai žodžiai: ekstremaliųjų reikšmių indeksas, ekstremaliųjų reikšmių statistika, rekordai, meteorologija.

Įvadas

Pastaruoju metu tampa aktualūs įvairių ekstremalių gamtos reiškinių (uraganinių vėjų, potvynių, karščių, speigų ir pan.) tyrimas, nes tai susiję su žmogaus sveikata, gamtos ekosistemų pusiausvyra, inžinerinių statinių saugumu. Tiriant šiuos reiškinius vis dažniau taikoma ekstremaliųjų reikšmių teorija. Ypač plačiai ekstremaliųjų reikšmių teorijos taikymai atspindimi [8] leidinyje. Iš oro temperatūros maksimumams skirtų darbų galėtume paminėti [7, 5]. Šiame straipsnyje tikslinsime ir tęsime [6] darbe pradėtą tyrimą. Pirmiausia patikslinsime anksčiau gautą Lietuvos oro temperatūros maksimumų pasiskirstymo įvertį. Po to įvertinsime oro temperatūros rekordo viršutinę ribą ir nustatysime dabartinio oro temperatūros rekordo rangą.

Tyrimams naudosime Lietuvos hidrometeorologijos tarnybos prie Aplinkos ministerijos suteiktą hidrometeorologinę informaciją apie aukščiausias metines oro temperatūras užregistruotas visose 1961–2014 m. Lietuvos teritorijoje veikusiose meteorologinėse stotyse.¹ Pažymėtina, kad užfiksuotas absoliutus Lietuvos oro temperatūros rekordas² nepatenka tarp mūsų nagrinėjamų duomenų, nes jis stebėtas agrometeorologinėje matavimo stotyje.

Apdorota informacija apie maksimalias metines oro temperatūras Lietuvoje pateikta 1 lentelėje.

1 Ekstremaliųjų reikšmių pasiskirstymo parametrų vertinimo metodai

Tarkime, X_1, \dots, X_n, \dots – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, turintys pasiskirstymo funkciją $F(x)$. Pažymėkime:

$$Z_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

¹ Neįtraukti veikusių agrometeorologijos stočių, paprastųjų klimato stočių ir vandens matavimo stočių duomenys.

² Aukščiausia oro temperatūra $+37,5^\circ\text{C}$, 1994-07-30, Zarasai.

1 lentelė. Užregistruoti oro temperatūros maksimumai Lietuvos meteorologijos stotyse 1961–2014 m.

Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C	Metai	°C
1961	30	1973	32	1985	30,6	1997	32,9	2009	31,7
1962	28,6	1974	30,9	1986	32,7	1998	34,5	2010	34,3
1963	35,2	1975	31,4	1987	31	1999	34,3	2011	32,5
1964	32,3	1976	30,7	1988	32,5	2000	31,9	2012	34,6
1965	29,4	1977	30,6	1989	32,9	2001	34	2013	34,1
1966	31,1	1978	29,2	1990	32	2002	35	2014	36,6
1967	30,9	1979	31,4	1991	32,4	2003	32,2		
1968	34,4	1980	29,1	1992	35,8	2004	31		
1969	31,4	1981	30,3	1993	30,7	2005	32,2		
1970	30,6	1982	31,4	1994	35,5	2006	35,2		
1971	33,5	1983	30,8	1995	33	2007	34,1		
1972	32	1984	32,9	1996	31,4	2008	31,3		

Jei atsitiktinių dydžių pasiskirstymo funkcija $F(x)$ tenkina tam tikras sąlygas [4], tai egzistuoja tokios centravimo ir normavimo konstantų sekos $\{a_n\}$ ir $\{b_n > 0\}$, su kuriomis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < x\right) = H_\gamma(x),$$

čia

$$H_\gamma(x) = \exp\left(- (1 + \gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}\right), \quad \text{kai } 1 + \gamma x > 0, \quad \gamma \in \mathbb{R},$$

– apibendrintasis maksimaliųjų reikšmių pasiskirstymas. Parametras γ vadinamas ekstremaliųjų reikšmių indeksu. Kaip žinoma [4], klasikinėje maksimumų schemoje egzistuoja tik trys ribinio pasiskirstymo tipai:

1. Frešė pasiskirstymas, kai $\gamma > 0$;
2. Veibulo pasiskirstymas, kai $\gamma < 0$;
3. Gumbelio pasiskirstymas, kai $\gamma = 0$.

Taikydami ribinę maksimumų teoremą maksimumo Z_n pasiskirstymą aproksimuosime ribiniu pasiskirstymu $H_\gamma\left(\frac{x - a_n}{b_n}\right)$. Norėdami tai padaryti, turime rasti ekstremaliųjų reikšmių indekso γ ir poslinkio bei mastelio parametrų $a = a_n$ ir $b = b_n$ įverčius.

Trumpai apžvelgsime šiame darbe taikomus įverčius. Tarkime, Z_1, \dots, Z_n – maksimumų seka. Sudarome jų variacinę seką:

$$Z_{(1)} \leq Z_{(2)} \leq \dots \leq Z_{(n)}$$

Pažymėkime:

$$M_{i,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln \left(\frac{Z_{(n-j+1)}}{Z_{(n-k)}} \right)^i,$$

$$N_{i,k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k (Z_{(n-j+1)} - Z_{(n-k)})^i,$$

čia $1 \leq k \leq n$, $i = 1, 2$.

1. Momentų įvertis [1]:

$$\hat{\gamma}_1 = M_{1,k,n} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{M_{2,k,n}}{M_{1,k,n}^2} - 1 \right)^{-1} \right).$$

Momentų įvertis yra universalus, t. y. jis taikomas su visais $\gamma \in \mathbb{R}$. Kadangi taikdami momentų įvertį gauname, kad ekstremaliųjų reikšmių indeksas γ yra neigiamas, tai toliau naudosime įverčius, pasiūlytus [3] darbe, kurie taikomi, kai $\gamma < 0$

2.

$$\hat{\gamma}_2 = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{M_{1,k,n}^2}{M_{2,k,n}} \right)^{-1}.$$

3.

$$\hat{\gamma}_3 = 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{N_{1,k,n}^2}{N_{2,k,n}} \right)^{-1}.$$

Parametro γ įverčiuose $k = k_n$, yra toks, kad $k = k_n \rightarrow \infty$, $k_n = o(n)$, kai $n \rightarrow \infty$. Poslinkio parametro $a = a_n$ įvertis yra

$$\hat{a} = Z_{(n-k)}.$$

Jei parametro γ įvertis yra $\hat{\gamma}_j$ ($j = 1, 2, 3$), tai mastelio parametro $b = b_n$ įvertis atitinkamai yra šis:

$$\hat{b}_j = Z_{(n-k)} M_{1,k,n} (1 - \min(0, \hat{\gamma}_j)), \quad j = 1, 2, 3.$$

2 Rekordo viršutinė riba

Tarkime, turime maksimumų seką Z_1, \dots, Z_n . Tada $Z_{(n)}$ bus dabartinis rekordas.

Pažymėkime

$$x^* = \sup \{x : H_\gamma(x) < 1\}.$$

Aišku, kad rekordas negali viršyti x^* . Taigi, galime sakyti, kad x^* yra viršutinė rekordo riba.

Taikysime [2] darbe pasiūlytą įvertį:

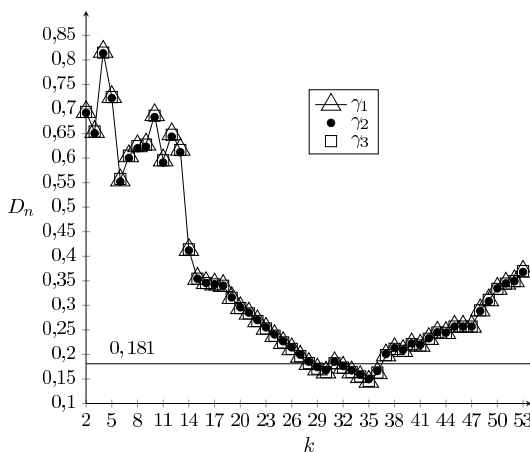
$$x_j^* = \hat{a} - \frac{\hat{b}_j}{\hat{\gamma}_j}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Šis įvertis taikomas, kai $\gamma < 0$. Kai $\gamma > 0$, $x_j^* = \infty$.

3 Rekordo rangas

Tegul $Z_{(n)}$ yra dabartinis rekordas. Iš patirties žinome, kad vieni rekordai išsilaiko trumpiau, kiti ilgiau, vieni išsiskiria labiau, kiti mažiau. Einmahl ir Magnus [2] darbe pasiūlyta rekordo kokybės – rango charakteristika.

$$e^{-Q},$$



1 pav. D_n reikšmių priklausomybė nuo k , esant skirtingiems γ įverčiams.

čia

$$Q = k \left[\max \left(0, 1 + \hat{\gamma}_1 \frac{Z_{(n)} - \hat{a}}{\hat{b}_1} \right) \right]^{-\frac{1}{\hat{\gamma}_1}}.$$

Kai išpildytos [2] nurodytos sąlygos, dydžio Q pasiskirstymas silpnai konverguoja į eksponentinį pasiskirstymą su parametru $\lambda = 1$. Todėl rekordo rangas e^{-Q} yra tolygiai pasiskirstęs intervale $(0, 1)$. Rekordo rangą galime interpretuoti taip: kuo aukštesnis jis yra, tuo rekordas yra išskirtinesnis lyginant jį su kitomis maksimumų reikšmėmis.

4 Pagrindiniai rezultatai

Taikant ekstremaliųjų reikšmių indekso įverčius svarbiausia yra tinkamai parinkti k reikšmę. Vienas k reikšmės parinkimo būdų yra euristinis metodas, aprašytas [2]. Mes k parinksime tokį, kad su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,05$ būtų priimtina suderinamumo hipotezė, kad Lietuvos maksimalių oro temperatūrų pasiskirstymo funkcija yra $H_{\hat{\gamma}}\left(\frac{x-\hat{a}}{\hat{b}}\right)$.

Taikėme Kolmogorovo–Smirnov kriterijų. 1 paveiksle pavaizduota D_n reikšmių priklausomybė nuo k .

Šiuo atveju Kolmogorovo–Smirnov kriterijaus kritinė reikšmė lygi 0,181, todėl visais trim atvejais suderinamumo hipotezė neatmetina, kai $32 \leq k \leq 36$.

Naudodamiesi, 1 lentelėje pateikta informacija įvertinome Lietuvos oro temperatūros maksimumų pasiskirstymo parametrų įverčius ir nustatėme oro temperatūros rekordo viršutinę ribą. Rezultatai pateikti 2 lentelėje. Lietuvos meteorologinėse stotyse užfiksuoto oro temperatūros rekordo, kuris yra $36,6^\circ\text{C}$ rangas lygus 0,53.

5 Išvados

1 išvada. Oro temperatūros metiniai maksimumai turi Veibulo pasiskirstymą.

2 lentelė. Lietuvos oro temperatūros maksimumų pasiskirstymo parametrų įverčiai ir oro temperatūros rekordo viršutinė riba, kai $k = 35$.

Parametro γ įvertis		\hat{a}	\hat{b}	x^*
$\hat{\gamma}_1$	-0,36	31,4	2,44	38,2
$\hat{\gamma}_2$	-0,41	31,4	2,54	37,5
$\hat{\gamma}_3$	-0,37	31,4	2,47	38

2 išvada. Priklausomai nuo taikyto γ įverčio, oro temperatūros rekordo viršutinė riba svyruoja nuo 37,5 °C iki 38,2 °C.

3 išvada. Dabartinio oro temperatūros rekordo rangas lygus 0,53. Neaukštas rekordo rangas paaiškinamas tuo, kad rekordinė temperatūra ryškiai neišsiskiria iš užfiksuotų metinių oro temperatūros maksimumų.

Literatūra

- [1] A. Dekkers, J. Einmahl and L. de Haan. A moment estimator for the index of an extreme-value distribution. *Ann. Stat.*, **17**:1833–1855, 1989.
- [2] J. Einmahl and J.R. Magnus. Records in athletics trough extreme-value theory. *J. Am. Stat. Assoc.*, **103**(484):1382–1391, 2008.
- [3] A. Ferreira, L. de Haan and L. Peng. On optimizing the estimation of high quantiles of a probability distribution. *Statistics*, **37**:401–434, 2003.
- [4] B.V. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d’une série aléatoire. *Annals of Math.*, **44**(3):423–453, 1943.
- [5] H. Hasan, N. Salam and M. B. Adam. Modelling extreme temperature in Malaysia using generalized extreme value distribution. *World Acad. Sci. Eng. Techn.*, **78**:435–441, 2013.
- [6] A. Jokimaitis ir D. Petronaitis. Apie maksimalių oro temperatūrų Lietuvoje pasiskirstymą. *Liet. matem. rink. LMD darbai, ser. B*, **54**:12–16, 2013.
- [7] R. W. Katz and R. Grotjahn. Statistical methods for relating temperature extremes to large-scale meteorological patterns. *US Clivar Variations*, **12**(1):4–7, 2014.
- [8] Special issue on statistics of extremes in weather and climate. *Extremes*, **13**:107–267, 2010.

SUMMARY

Analysis of maximum air temperature distribution

A. Jokimaitis, D. Petronaitis

The article authors detected distribution estimates of maximum air temperature. Also estimated ultimate temperature record and found quality of temperature record.

Keywords: extreme value index, statistics of extremes, ultimate record, meteorology.